

Suites tendant vers l'infini

Intuition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

(Pour des grandes valeurs de n , (a_n) reste arbitrairement grand)

la suite (a_n) diverge vers l'infini.

Définition formelle :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$



$$\forall A > 0, \exists N > 0 \text{ tel que } \forall n \geq N, a_n > A$$

Similairement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} -a_n = +\infty$$

Comme avant, on écrit aussi :

$$\begin{cases} a_n \rightarrow +\infty \\ \text{ou} \\ a_n \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Rem : si $a_n \rightarrow \pm\infty$ alors (a_n) diverge

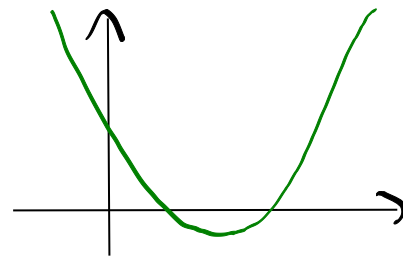
(c'est un cas particulier de la divergence)

Exemple : Montrons que $a_n = \frac{n^2 - 1}{3n} \rightarrow +\infty$

Soit $A > 0$. On doit montrer que $\exists N > 0$ tel que, $\forall n \geq N, a_n > A$. Hors

$$a_n > A ; \quad \frac{n^2 - 1}{3n} > A ;$$

$$3n^2 - 1 > 3An ; \quad 3n^2 - 3An - 1 > 0$$



↳ parabole qui 'sourit'

$$S =]-\infty; r_1[\cup]r_2; +\infty[$$

↳ consient $+\infty$ donc

il y a un seuil N , à partir duquel

Par exemple, ici les racines sont $a_n > A$!

$$\frac{3A - \sqrt{9A^2 + 4}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3A + \sqrt{9A^2 + 4}}{2}$$

Ponc, on peut prendre

$$N = \left\lceil \frac{3A + \sqrt{9A^2 + 4}}{2} \right\rceil + 1$$
↑ arrondi vers le haut

Exemple

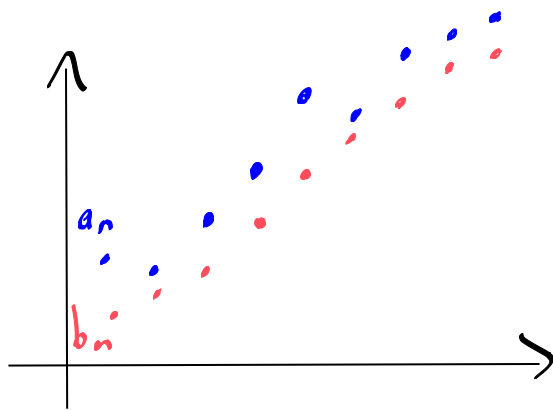
Thm (théorème du chien méchant)

Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que

- $a_n \geq b_n$

- $b_n \rightarrow +\infty$

Alors $a_n \rightarrow +\infty$



Comme dans le

théorème des gens d'armes, si la condition

$a_n \geq b_n$

n'est que vraie pour n assez grand, ça marche aussi !

Exemple $a_n = n^2 + \cos^3(8n)$. Comme

$a_n \geq n^2 - 1 \rightarrow +\infty$,

alors $a_n \rightarrow +\infty$.

Règles pour les limites

• $a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow 0$

• $\begin{cases} a_n \rightarrow +\infty \\ b_n \text{ minorée} \end{cases} \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow +\infty$

• $\begin{cases} a_n \rightarrow -\infty \\ b_n \text{ majorée} \end{cases} \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow -\infty$

• $\begin{cases} a_n \rightarrow +\infty \\ b_n \rightarrow b, b > 0 \end{cases} \Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$

$\exists \delta > 0$ tel que $|b_n| \geq \delta \forall n$ assez grand.

Exemple $n(1 + \frac{1}{3}\cos(n^2 + 7)) \rightarrow +\infty$

$\downarrow$ $\geq \frac{2}{3}$

$$\bullet \begin{cases} a_n \rightarrow +\infty \\ b_n \rightarrow +\infty \end{cases} \Rightarrow a_n - b_n \text{ indéterminé!} \\ (\infty - \infty)$$

Exemples

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 2^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

$$\bullet \begin{cases} a_n \rightarrow +\infty \\ b_n \rightarrow +\infty \end{cases} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \text{ indéterminé!} \\ \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

Exemple

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \begin{cases} a_n \rightarrow +\infty \\ b_n \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow a_n \cdot b_n \text{ indéterminé!} \\ (\infty \times 0)$$

Dernier exemple

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3 + n^2 + 1} \\ &= \left(\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3 + n^2 + 1} \right) \frac{\sqrt{n^3 + 1} + \sqrt{n^3 + n^2 + 1}}{\sqrt{n^3 + 1} + \sqrt{n^3 + n^2 + 1}} \\ &= \frac{n^3 + 1 - (n^3 + n^2 + 1)}{\sqrt{n^3 + 1} + \sqrt{n^3 + n^2 + 1}} \\ &= \frac{-n^2}{n^2 \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}} + n^2 \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}} + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}} \rightarrow -\infty \end{aligned}$$